

支撑点与振源重合的圆形薄板二维驻波的实验与仿真研究

曹小敏, 邵港萍, 陆星辰, 李成金, 钱 铮

(苏州大学 文正学院, 江苏 苏州 215104)

摘要:通过实验和 MATLAB 软件对支撑点与振源在圆心重合的圆形薄钢板上的二维驻波进行了测量、数值计算和仿真研究,测量结果和数值计算以及仿真均与理论计算吻合,并给出一种测量材料杨氏模量的简单方法.在大学物理层面,对于物理实验和仿真做了有意义的尝试.

关键词:二维驻波;贝塞尔函数;MATLAB;数值计算;仿真;杨氏模量

中图分类号:O 4-33 文献标识码:A 文章编号:1000-0712(2018)06-0057-04

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.170662

驻波是大学物理中的重点和难点,常见的驻波有一维驻波、二维驻波.前者是课程的重点,不仅要定量计算,还要做定性演示.而后者由于数学知识等限制,一般只做实验演示或视频演示.国内有学者从理论上做了一些计算,也进行了适当实验研究^[1].但是对于振源与支撑点在圆心重合的情况,未进行更多的计算和实验测量.本文在文献 [1] 的基础上,做了进一步推导.并且对于支撑点与振源重合的情况做了详细的实验测量和 MATLAB 仿真.

1 实验原理分析

1.1 实验器材与步骤

本实验采用如下器材和设备:低频信号发生器、压电陶瓷片、圆形钢板两块、石英砂、钢板支架以及导线若干.

实验步骤为:1) 测量钢板的直径和厚度,并算出半径 a 和半厚度 h ;2) 将压电陶瓷片粘贴于钢板底部中心;3) 连接低频信号发生器;4) 将钢板水平地置于环形(半径略大于压电陶瓷片)支架;5) 在钢板上比较均匀地抛撒石英砂;6) 接通信号发生器电源,调整输出幅度与频率.

实验中随着信号频率的变化,可以找到一系列形成驻波时的频率,如表 1 中的数据所示.关掉信号电源,测量共振时(形成驻波)每个频率对应的一系列驻波波节的直径,并计算半径 r_i ,填入数据表格 1.同时拍下驻波波节的分布图像,即克拉尼图形,如图 1 所示.

1.2 实验原理分析

考虑一块水平放置的均质、均厚度的圆形钢薄板,令振源与支撑点重合于圆心,其厚度为 $2h$ (h 为半厚度,且很小),半径为 a .借助信号发生器使钢板以频率 f ,垂直板面沿竖直方向做简谐振动.将压电陶瓷片简化为点波源,则可求解薄板振动方程的简正模式及薄板发生共振时驻波波节的位置和半径^[2].

设薄板的密度为 ρ ,杨氏模量为 Y .钢板上机械波的波速为 u ,以圆心为原点,取极坐标 (r, θ) ,任意点 t 时刻的竖直方向的振动位移(挠度)为 $\eta(r, \theta, t)$ (取静止时的位移为零),又根据理论声学 and 弹性力学的知识可知, η 满足以下方程:

$$\nabla^4 \eta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其中, $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$, ∇^2 为拉普拉斯算符, c 是与板材的密度、泊松比、杨氏模量以及半厚度相关的常数,且满足下式,

$$\frac{1}{c^2} = \frac{3\rho(1-\mu^2)}{Yh^2} \quad (2)$$

μ 是泊松比,对多数材料, μ 约为 $0.25 \sim 0.33$.当形成驻波时,振动坐标和时间可分离变量,即

$$\eta = Z(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (3)$$

其中 Z 满足如下方程:

$$(\nabla^2 - k^2)(\nabla^2 + k^2)Z = 0 \quad (4)$$

其中

$$k^4 = \omega^2 / c^2 \quad (5)$$

收稿日期:2017-12-03;修回日期:2017-12-25

作者简介:曹小敏(1995—),男,江苏南通人,苏州大学文正学院光电与能源工程系,2015 级本科生.

k 是波矢, 且, $k=2\pi/\lambda$. $\omega=2\pi f$, 为波源的圆频率.

通过求解边界条件 $r=0$ 处的有限解, 得方程 (4) 的解的简正模式为

$$Z=R(r)\Phi(\theta)=$$

$$[AJ_m(kr)+BI_m(kr)](C\cos m\theta+D\sin m\theta) \quad (6)$$

其中 $J_m(x)$ 为 m 阶贝塞尔函数, $I_m(x)$ 为 m 阶变形贝塞尔函数, 满足 $I_m(x)=i^{-m}J_m(ix)$.

当支撑点和振动源都在圆心时, 由对称性可知, Z 与 θ 无关, 所以形成的二维驻波图案中只有圆环状的波节线, 没有来自圆心的辐射状波节线, 即 $m=0$. 此时对应的 Z 的解为

$$Z_{0n}(r)=A_{0n}[J_0(k_{0n}r)-\frac{(k_{0n}a)J_0''(k_{0n}a)+\mu J_0'(k_{0n}a)}{(k_{0n}a)I_0''(k_{0n}a)+\mu I_0'(k_{0n}a)}I_0(k_{0n}r)] \quad (7)$$

$$\eta=Z_{0n}(r)e^{i\omega_{0n}t} \quad (8)$$

由边界条件可知, 只有特定的频率 (共振频率) ω_{0n} 才可以产生如式 (8) 的简谐振动 (也是驻波), 于是式 (5) 变为

$$k_{0n}=\sqrt{\frac{\omega_{0n}}{c}}=\sqrt{\frac{2\pi f_{0n}}{c}} \quad (9)$$

调节振源的频率 $\omega_0=2\pi f$, 当 $\omega_0=\omega_{0n}=2\pi f_{0n}$ 时, 可产生共振. 此时满足 $Z_{0n}(r)=0$ 的 r , 就是共振波节线的 r , 即

$$J_0(k_{0n}r)=\frac{(k_{0n}a)J_0''(k_{0n}a)+\mu J_0'(k_{0n}a)}{(k_{0n}a)I_0''(k_{0n}a)+\mu I_0'(k_{0n}a)}I_0(k_{0n}r) \quad (10)$$

2 MATLAB 数值计算和仿真

为了应用 MATLAB 求解对应于实验测得的一

表 1 圆形薄板波节半径 r 的实验值与理论值对比 (圆盘: $a=20.0$ cm, $h=0.75$ mm)

频率/Hz	波节	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 300	实验值 r_i /cm	3.10	6.75	10.80	14.92						
	理论值 r_i' /cm	3.03	6.97	10.93	14.87						
3 500	实验值 r_i /cm	2.45	6.05	9.25	12.60	15.85	18.85				
	理论值 r_i' /cm	2.46	5.65	8.86	12.07	15.28	18.84				
4 800	实验值 r_i /cm	2.15	4.90	7.25	10.65	13.50	16.30	18.95			
	理论值 r_i' /cm	2.10	4.82	7.56	10.31	13.05	15.79	18.76			
6 100	实验值 r_i /cm	1.95	4.40	6.85	9.40	11.80	14.40	16.90	19.20		
	理论值 r_i' /cm	1.86	4.28	6.71	9.14	11.58	14.01	16.44	19.15		
10 900	实验值 r_i /cm	1.10	3.10	4.90	6.65	8.40	10.35	12.30	14.10	15.90	17.75
	理论值 r_i' /cm	1.39	3.20	5.02	6.84	8.66	10.48	12.30	14.13	15.95	17.76

系列共振频率的式 (10) 的解, 即各频率下各波节半径的理论值, 并且对二维驻波进行仿真, 我们进行如下贝塞尔函数与变形贝塞尔函数以及递推公式的推导, 即

$$xJ_n'(x)+nJ_n(x)=xJ_{n-1}(x)$$

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$$

$$J_0'(x)=-J_1(x)$$

$$J_0''(x)=-J_0(x)+\frac{J_1(x)}{x}$$

$$I_0'(x)=I_1(x)$$

$$I_0''(x)=i\frac{I_1(x)}{x}-I_0(x)$$

考虑上述递推关系、相关常数、共振频率以及式 (10), 应用 MATLAB, 分段解超越方程, 即可算出各频率下, 圆形波节线半径的理论值 r_i' .

3 实验演示与杨氏模量测量

3.1 实验演示

本文对于相同材料两种不同厚度的钢板做了实验测量、计算和仿真. 查表取杨氏模量 $Y=210$ GPa; 泊松比 $\mu=0.31$; 测得钢板半径 $a=20.0$ cm; 钢板半厚度分别为 $h_1=0.50$ mm 或 $h_2=0.75$ mm; 两个不同 (半) 厚度钢板形成驻波的频率如下:

$h_1=0.50$ mm: 2 200 Hz, 2 950 Hz, 3 800 Hz, 5 600 Hz, 7 700 Hz.

$h_2=0.75$ mm: 2 300 Hz, 3 500 Hz, 4 800 Hz, 6 100 Hz, 10 900 Hz.

代入 MATLAB 程序中, 将计算的各共振频率下波节的理论半径 r_i' 填入表 1 中.

从实验值与理论值的比对可见, 绝大部分数据符合的相当好, 相对误差几乎均在 5% 以下. 而对应 10 900 Hz 的第一环, 误差高达 26%. 这个误差可视为粗大误差. 实际上, 该误差的出现也是意料之中的. 因为本实验的振源支撑的重合是通过压电陶瓷片与几乎同半径的圆环支撑实现的, 实验条件与理论计算有些差异. 这不仅导致小半径对应的数据误差较大, 也使驻波图形在该区域有些变形. 但其绝大部分数据及驻波图形令人满意, 如图 1 所示. 图 2、图 3 是根据数据用 MATLAB 仿真的三维、二维驻波图形. 驻波半径的理论值是根据图 3 的曲线, 通过分段解超越方程求得的.



图 1 频率为 3 500 Hz 时的实测图

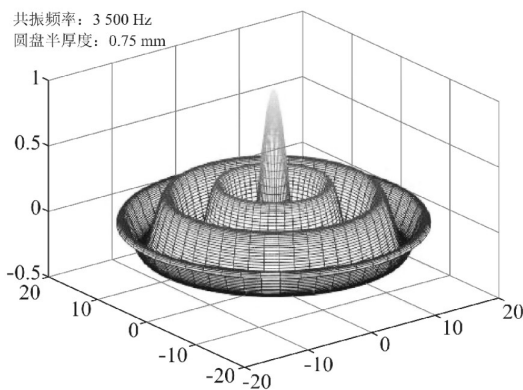


图 2 频率为 3 500 Hz 的三维仿真图

3.2 杨氏模量的测量及不确定度计算

通过本实验的测量和计算, 可提供一种测量材料杨氏模量的简易方法: 将待测材料做成一定半径和厚度的圆盘, 与其它实验装置连接后, 调整信号发

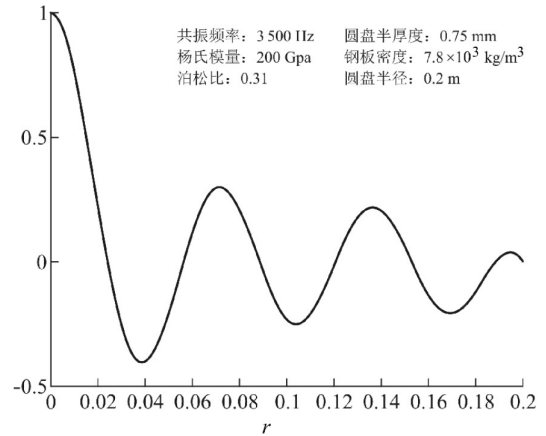


图 3 频率为 3 500 Hz 的二维数值模拟图

生器频率使之形成驻波. 记录形成驻波时的频率 f , 测量该盘的厚度, 并计算其半厚度 h , 测量波节间距离, 并计算波长 λ . 为了计算材料的杨氏模量, 可进行如下推导.

联立式 (2)、式 (5) 可得

$$Y = \frac{3\rho(1-\mu^2)}{h^2} \frac{\omega^2}{k^4} \tag{11}$$

其中

$$\omega = 2\pi f, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

代入式 (11), 整理得

$$Y = \frac{3\rho f^2 \lambda^4 (1-\mu^2)}{4\pi^2 h^2} \tag{12}$$

将本实验材料的泊松比 $\mu = 0.31$, 密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 半厚度 $h = 0.75 \text{ mm}$, 以及从表 1 中算出的各频率 f 下的波长 λ 代入式 (12), 可计算出本钢材的杨氏模量如表 2.

表 2 钢板杨氏模量的测量数据与参考值的比较

频率 / Hz	杨氏模量 / GPa	相对误差 / %
2 300	194	7.4
3 500	216	2.9
4 800	216	2.8
6 100	209	0.2
10 900	212	1.0

对于上述测量结果, 我们以 3 500 Hz 为例进行了不确定度计算, (其它数据请见表 3). 在式 (12) 中, 密度 ρ 和泊松比 μ 取已知的常量, 因此不确定度由波长 λ , 频率 f 和半厚度 h 的测量产生. 对于频率和半厚度我们采取单次读取和测量, 因此只考虑 B 类不确定度, 而波长的测量对结果影响较大, 因此进行了多次测量, 计算了 A 类、B 类不确定度. 根据不

确定度的传递公式有

$$\frac{\Delta Y}{Y} = 4 \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + 2 \frac{\Delta f}{f} + 2 \frac{\Delta h}{h} \quad (13)$$

其中每一项的计算结果为: $\Delta \lambda / \lambda = 0.012$, $\Delta f / f = 0.008$, $\Delta h / h = 0.004$. 代入上式后得, $\Delta Y / Y = 0.072$. 以前述的 210 GPa 为标准值, 我们可以将杨氏模量的最后结果表示为

$$Y = (210 \pm 15) \text{ GPa}$$

比较上述杨氏模量的相对不确定度 (7.2 %) 与表 2 中 3 500 Hz 的相对误差 (2.9 %), 可以发现, 差异较大. 原因有二: 第一, 波长测量本身误差较大, 因为石英砂形成的波节较宽, 导致测量误差较大; 第二, 式 (13) 表明, 波长测量对不确定度的贡献比另外两个量的不确定度大二倍.

表 3 不同频率下, 杨氏模量测量不确定度计算的相关数据

序号	频率/Hz	λ_1 /cm	λ_2 /cm	λ_3 /cm	λ_4 /cm	λ_5 /cm	λ /cm	$\Delta \lambda / \lambda$	$\Delta f / f$	$\Delta h / h$	$\Delta Y / Y$
1	2 300	7.65	7.70	7.30	7.80	7.55	7.60	0.012	0.013	0.004	0.081
2	3 500	6.25	6.60	6.55	6.35	6.60	6.47	0.012	0.008	0.004	0.072
3	4 800	5.45	5.65	5.50	5.75	5.75	5.62	0.012	0.006	0.004	0.068
4	6 100	4.80	5.10	5.00	4.95	5.00	4.97	0.011	0.005	0.004	0.061
5	10 900	3.65	3.60	3.75	3.70	3.70	3.68	0.010	0.003	0.004	0.053

由此可见, 此方法测量的杨氏模量与理论值基本符合, 显然, 通过测量频率、波长以及其它几何参数计算材料的杨氏模量是可行的.

4 总结

本文以低频信号发生器和压电陶瓷蜂鸣片相连为振源, 并与以中心为支撑点的薄钢板相连, 形成二维驻波演示系统. 初步实现了二维驻波演示, 并通过改变信号源频率, 实现了不同频率, 不同驻波波形的演示与测量, 实现了不同频率的二维驻波展示与定量测量. 并用 MATLAB 进行数值计算和模拟仿真, 实测图案与仿真图形对比, 测量数据与仿真

数据对比, 实验与理论结果基本符合. 由此验证了文献 [1] 中得出的公式和结论. 并通过测量频率、波长以及其它几何参数实现了钢板杨氏模量的测量, 并找到测量材料杨氏模量的简便方法.

致谢: 感谢苏州大学物理与光电能源学部张健敏老师的大力支持与有益讨论.

参考文献:

- [1] 方奕忠, 王钢, 沈韩, 等. 圆形薄板二维驻波的研究 [J]. 大学物理, 2015, 34(3): 19-24.
- [2] 梁昆森. 数学物理方法 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1978: 365.

Research on experiment and simulation for two dimensional standing waves on circular plate whose support coincided with vibration source

CAO Xiao-min, SHAO Gang-ping, LU Xing-chen, LI Cheng-jin, QIAN Zheng

(Wenzheng College of Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215104, China)

Abstract: In this paper, the two dimensional standing waves on circular plate whose support coincided with vibration source are measured, calculated and simulated by experiment and MATLAB. The testing results follow with MATLAB's simulation very well. It has shown a method to measure the Young modulus. It is a significant practice for college physics experiment and simulation.

Key words: two dimensional standing waves; Bessel function; MATLAB; numerical calculation; simulation; Young's modulus